

LAHENDUSED 9. KLASS

1. Vastus: Osa II pindala on 140 cm^2 ja osa IV pindala on 184 cm^2 .

Lahendus :

Olgu $BC = x\text{ cm}$ ja $EF = y\text{ cm}$.

Sel juhul $CD = 2x\text{ cm}$ ja $AB = 2y\text{ cm}$. Kuna osad II ja IV moodustavad koos ruudu, siis $AC = CF$. Seega $2y + x = CE + y$.

Järelikult $CE = (x + y)\text{ cm}$.

Kuna II ja III osade pindalade summa on 420 cm^2 , siis

$BD \cdot CE = 420\text{ cm}^2$. Saame, et

$$3x(x + y) = 420, 3x^2 + 3xy = 420, x^2 + xy = 140, x(x + y) = 140.$$

Paneme tähele, et osa II pindala on $BC \cdot CE = x\text{ cm} \cdot (x + y)\text{ cm}$.

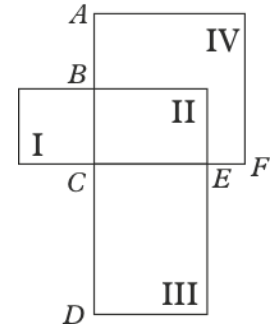
Järelikult osa II pindala on 140 cm^2 .

Et ristküliku, mis moodustub osadest I ja II pindala on 240 cm^2 , siis teades nüüd kujundi II pindala saame, et osa I pindala, mis on $BC^2\text{ cm}^2 = x^2\text{ cm}^2$, on $240\text{ cm}^2 - 140\text{ cm}^2 = 100\text{ cm}^2$.

Ehk $x^2 = 100$, millest $x = 10$. Kuna $x(x + y) = 140$ ja teades nüüd, et $x = 10$, saame, et $x + y = 14$ ja järelikult $y = 4$.

Osa IV pindala saame, kui ruudust, mille osad II ja IV koos moodustavad lahutame II osa pindala.

$$(x + 2y)^2\text{ cm}^2 - 140\text{ cm}^2 = (10 + 2 \cdot 4)^2\text{ cm}^2 - 140\text{ cm}^2 = 324\text{ cm}^2 - 140\text{ cm}^2 = 184\text{ cm}^2.$$



Hindamine:

Avaldatud lõigu CE pikkus lõikude AB ja EF abil: 1p

Leitud osa II pindala: 3p

Leitud ruudu, mis moodustub osadest II ja IV, pindala: 1p

Leitud osa IV pindala: 2p

7p

Märkus: Antud vaid õige täielik vastus 2p.

2. Vastus: Valikute arv on 682.

Lahendus 1:

Et vähim arv valikus peab olema paaritu, siis valiku vähimaks arvuks saavad olla arvud 1, 3, 5, 7 ja 9.

Kui vähimaks arvuks on 9. Siis on kaks valikut: {9} ja {9, 10}.

Olgu vähimaks arvuks on 7.

Siis ühe arvuga valikuid on üks: {7}.

Kahe arvuga valikuid on {7, 8} ja {7, 9} ja {7, 10}. Neid on niimitu, kui on valitud vähimast arvust suuremaid arve.

Kolme arvuga valikuid on {7, 8, 9} ja {7, 8, 10} ja {7, 9, 10}.

Nelja arvuga valikuid on üks {7, 8, 9, 10}.

Seega kui vähimaks arvuks valikus on 7, siis valikuid on $1 + 3 + 2 + 1 + 1 = 8$.

Olgu vähimaks arvuks on 5.

Siis ühe arvuga valikuid on üks, s.o 5.

Kuna arvust 5 suuremaid arve on viis, siis kahe arvuga valikuid on kokku 5.

Kolme arvuga valikuid, kus on arvud 5 ja 6 on kokku 4, kus on arvud 5 ja 7 on kokku 3, kus on arvud 5 ja 8 on kokku 2 ja kus on arvud 5 ja 9 on 1. Seega kahe arvuga valikuid on kokku $4 + 3 + 2 + 1$.

Vaatleme nelja arvuga valikuid.

Valikus on arvud 5 ja 6. Selliseid kus on arvud 5, 6 ja 7 on 3, kus on arvud 5, 6 ja 8 on 2, kus on arvud 5, 6 ja 9 on 1. Kokku on $3 + 2 + 1$ valikut.

Valikus on arvud 5 ja 7. Kus on arvud 5, 7 ja 8 on 2, kus on arvud 5, 7 ja 9 on 1. Kokku on $2 + 1$ valikut.

Valikus on arvud 5 ja 8. Sel juhul on kindlasti valikus veel ka arvud 9 ja 10. Selliseid valikuid on 1.

Nelja arvuga valikuid on kokku $(3 + 2 + 1) + (2 + 1) + 1 = 10$.

Vaatleme viie arvuga valikuid.

Kuna arvust 5 suuremaid arve on viis, siis igast valikust tuleb üks arvudest välja jätta ja selliseid valikuid on 5.

Vaatleme kuue arvuga valikuid. Selliseid on vaid üks {5, 6, 7, 8, 9, 10}.

Seega valikuid, kus vähimaks arvuks on 5 on kokku: $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$.

Kui vähimaks arvuks on 3.

Analoogselt saame, et ühe arvuga valikuid on 1.

Kahe arvuga valikuid on: 7

Kolme arvuga valikuid on: $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$. See on sama, mis seitsmest arvust valida kaks erinevat arvu.

Nelja arvuga valikuid on 35. See on sama, mis seitsmest arvust valida kolm erinevat arvu.

Viie arvuga valikuid on 35. See on sama, mis seitsmest arvust valida neli erinevat arvu ehk mitte valida kolme arvu.

Kuue arvuga valikuid on 21. See on sama, mis seitsmest arvust valida viis erinevat arvu.

Seitsme arvuga valikuid on 7. See on sama, mis seitsmest arvust valida kuus erinevat arvu.

Kaheksa arvuga valikuid on 1.

Kui vähimaks arvuks on 3, siis valikuid on kokku

$$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128.$$

Kui vähimaks arvuks on 1.

Ühe arvuga valikuid on 1.

Kahe arvuga valikuid on 9.

Kolme arvuga valikuid on 36. See on sama, mis 9-st arvust valida 2 erinevat. Esimese arvu valikuks on 9 võimalust ja teise valikuks 8. Kuna aga järjestus pole oluline, siis oleme paare lugenud kaks korda. Seega valikuid on $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$

Nelja arvuga valikuid on 84. See on sama, mis 9-st arvust valida 3 erinevat. Esimese arvu valikuks on 9, teise valikuks 8 ja kolmanda valikuks 7. Kuna aga järjestus pole oluline, siis oleme igat kolmikut arvestanud kuus korda. Seega valikuid on $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$

Viie arvuga valikuid on 126. See on sama, mis 9-st arvust valida 4 erinevat. Esimese arvu valikuks on 9, teise valikuks 8, kolmanda valikuks 7 ja neljanda omaks 6. Kuna aga järjestus pole oluline, siis oleme igat kolmikut arvestanud kuus 24 korda.

$$\text{Seega valikuid on } \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{24} = 126.$$

Kuue arvuga valikuid on 126. See on sama, mis 9-st arvust valida 5 erinevat. Esimese arvu valikuks on 9, teise valikuks 8, kolmanda valikuks 7 ja neljanda omaks 6 ja viienda omaks 5.

Kuna aga järjestus pole oluline, siis oleme igat kolmikut arvestanud kuus 120 korda. Seega valikuid on $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{120} = 126$.

Seitsme arvuga valikuid on 84.

Kaheksa arvuga valikuid on 36.

Üheksa arvuga valikuid on 9.

Kümne arvuga valikuid on 1.

Kui vähimaks arvuks on 1, siis valikuid on kokku

$$1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 512.$$

Kokku on üldse valikuid: $2 + 8 + 32 + 128 + 512 = 682$.

Lahendus 2.

Kui väikseim arv valikus on 1.

Kui väikseim arv on 1, siis võib Mati valida suvalise hulga arve naturaalarvudest 2 kuni 10 lisaks arvule 1.

Naturaalarvudes 2 kuni 10 on kokku 9 arvu, igaüht neist võib kas valida või mitte valida.

Seega on võimalusi: 2^9 .

Kui väikseim valitud arv on 3.

Lisaks võib valida suvaliselt naturaalarve hulgast 4 kuni 10 (kokku 7 arvu).

Võimalusi: 2^7 .

Kui väikseim arv valikus on 5.

Lisaks saab valida naturaalarve hulgast 6 kuni 10 (5 arvu).

Võimalusi: 2^5 .

Kui väikseim arv valikus on 7.

Valitud on 7, lisaks võib valida naturaalarve hulgast 8 kuni 10 (3 arvu).

Võimalusi: 2^3 .

Kui väikseim arv valikus on 9.

Valitud on 9, lisaks võib valida arvu 10 (1 arv).

Võimalusi: 2^1 .

Kokku on võimalusi:

$$2^9 + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 = 512 + 128 + 32 + 8 + 2 = 682.$$

Hindamine:

Leitud valikute arv, kui vähim arv valikus on 9 ja 7:

1p

Leitud valikute arv, kui vähim arv valikus on 5:

1p

Leitud valikute arv, kui vähim arv valikus on 3:

2p

Leitud valikute arv, kui vähim arv valikus on 1:

3p

7p

Märkus: Antud vaid õige vastus 2p.

3. Vastus: Arvu n vähim võimalik positiivne väärtus on 17.

Lahendus:

Teisendame avaldist $n! + (n + 1)! + (n + 2)!$.

$$\begin{aligned}n! + (n + 1)! + (n + 2)! &= n! + n!(n + 1) + n!(n + 1)(n + 2) = \\&= n!(1 + n + 1 + (n + 1)(n + 2)) = n!(2 + n + n^2 + 2n + n + 2) = \\&= n!(n^2 + 4n + 4) = n!(n + 2)^2\end{aligned}$$

Et $361 = 19^2$, siis $n!(n + 2)^2$ peab jaguma arvuga 19.

Kui $n!$ jagub arvuga 19, siis $n \geq 19$.

Kui $(n + 2)^2$ jagub arvuga 19, siis $n + 2 \geq 19$, ehk $n \geq 17$.

Tõepoolest $n!(n + 2)^2$ jagub arvuga 19^2 ehk arvuga 361.

Hindamine:

Avaldatud, et $n! + (n + 1)! + (n + 2)! = n! + n!(n + 1) + n!(n + 1)(n + 2)$: 1p

Saadud, et $n! + (n + 1)! + (n + 2)! = n!(n + 2)^2$: 2p

Märgatud, et $361 = 19^2$: 1p

Vaadeldud juhtu kui $n!$ jaguks arvuga 19: 1p

Vaadeldud juhtu, et $n + 2$ jagub arvuga 19: 1p

Leitud, et $n \geq 17$: 1p

7p

Märkus: Antud vaid õige vastus: 2p.

4. Vastus: Lõik x on pikkusega $\frac{2}{3}$.

Lahendus:

Paneme tähele, et kujund on osa 3×3 ruudustikust.

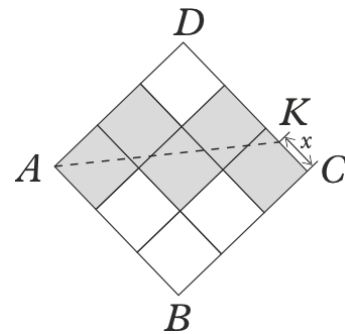
Olgu meil ruut $ABCD$ ja kujundi jaotav lõik AK .

Kuna terve kujundi pindala on 5 ühikut, siis kummalegi poole lõiku AK jääva osa pindala on 2,5.

Seega nelinurka $ABCK$ jääva osa pindala saame leida kui trapetsi $ABCK$ pindalast lahutame kolme ühikruudu pindala.

Saame kirjutada $\frac{AB+x}{2} \cdot BC - 3 = \frac{3+x}{2} \cdot 3 - 3 = \frac{9+3x}{2} - 3$. Teame, et see on 2,5

Seega $\frac{9+3x}{2} - 3 = 2,5$, millest $9 + 3x = 11$ ja $x = \frac{2}{3}$.



Hindamine:

Tehtud lisakonstruksioon: 3p

Tähelepanek, et kummalegi poole siksakki jaotavat joont jääva osa pindala on 2,5: 1p

Leitud avaldis, mis võimaldab leida arvu x : 1p

Leitud arvu x : 2p

7p

Märkus: Antud vaid õige vastus: 2p

5. Vastus: Kujundi välispiirjoone pikkus on 3746 pikkusühikut.

Lahendus:

Paneme tähele, et vasakpoolseimal numbril üheksa on 3 sellist ühikruutu, mille on 3 naabrit ja parempoolseimal numbril üheksa on selliseid ühikruute kas 4 või 3, sõltuvalt sellest kas reas on paaris või paaritu arv number üheksaid. Mitte äärmistel numbritel üheksa on kolme naabriga ühikruute 8, kui selle numbri järjekorranumber on paarisarvuline ja kolme naabriga ühikruute on 6, kui selle numbri järjekorranumber on paaritu.

Seega kolme naabriga ruutude arv on kas $3 + x(8 + 6) + 4$, kui reas $2x + 2$ numbrit või $3 + y(8 + 6) - 3$, kui reas on $2y + 1$.

Kui mustriks oleks on $2y + 1$ numbrit, siis teades, et kolme naabriga ruute on kokku 1533, saame $3 + y(8 + 6) - 3 = 1533$, millest $14y = 1533$. Kuna y peab olema naturaalarv, siis see ei ole võimalik.

Järelikult mustriksse on joonestatud $2x + 2$ üheksat, ning $3 + x(8 + 6) + 4 = 1533$, millest $14x = 1526$ ja $x = 109$. Seega joonistas Mati ritta $2 \cdot 109 + 2 = 220$ number üheksat.

Kujundi piirjoone pikkuse leidmiseks paneme tähele et vasakpoolseim number üheksa annab piirjoone osaks 20 ühikruudu külge, Iga miitte äärmine paarisarvulise järjekorranumbriga number üheksa annab 17 ühikruudu külge ja paarituvulise järjekorranumbriga number üheksa annab ka 17 ühikruudu külge. Parempoolsim number üheksa annab 20 ühikruudu külge.

Seega kujundi välise piirjoone pikkus on võrdne $20 + 17 \cdot 218 + 20 = 3746$ ühikruudu küljepikkusega ehk 3746 pikkusühikuga.

Hindamine:

Tähelepanek, et kolme naabriga ühikruutude arv avaldub erinevalt, kui reas on paaris või paaritu arv numbreid: 1p

Leitud avaldis kolme naabriga ühikruutude arvule, kui üheksaid on paarisarv: 2p

Leitud avaldis kolme naabriga ühikruutude arvule, kui üheksaid on paarituarv ja näidatud, et see ei saa olla: 1p

Leitud üheksate arv reas: 1p

Leitud välise piirjoone pikkus: 2p

7p

Märkus: Antud vaid õige vastus: 2p