LXXIII олимпиада по математике Эстонии
ШКОЛЬНЫЙ ТУР ТАЛЛИННА
Таллинн, 7 января 2026 года
XII класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Карл разместил все последовательные натуральные числа, начиная с числа 5 и до числа 20 в ячейки таблицы 4 х 4, причем каждое из чисел было записано только один раз, и сумма четырех чисел, записанных в каждом ряду и в каждом столбце таблицы, была равна одному и тому же числу. Мария заменила каждую цифру в этой таблице на одну из букв A, B, C, D, E, K, L, M, N или P так, чтобы одинаковым цифрам соответствовали одинаковые буквы, а различным цифрам – различные буквы. В итоге получилась таблица, изображенная на рисунке. Найдите все возможные варианты таблицы, которую первоначально составил Карл.

K	AB	L	CD
AP	AA	AN	M
AK	AC	AM	N
P	AE	AD	AL

2. Из функций $f(x)=x^2-x$ и $g(x)=1+x$, определенных на множестве всех действительных чисел R, составили функцию $F(x)=f\left[g\left(f(x)\right)\right]$.
а) Найдите экстремумы функции $y=F(x)$ и определите вид экстремума.
б) Покажите, что функция $G(x)=F(x)-f(x)$ является неотрицательной на всей области определения.

3. Обозначим сумму цифр натурального числа n символом $S(n)$ (например, если $n=123$, то $S(n)=6$). Найдите все возможные значения натурального числа n, для которых выполняется равенство:
а) $n+S(n)+S(S(n))=2026$
б) $n+S(n)+S(S(n))+S(S(S(n)))=2026$.

4. Величина угла BAC при вершине равнобедренного треугольника ABC равна 2α, а длина отрезка, соединяющего середины боковых сторон U и V, равна p. Вне треугольника ABC построены два равнобедренных треугольника AKB и AMC, у которых величины углов при вершинах AKB и AMC также равны 2α.
а) Докажите, что четырехугольник $KBCM$ – это равнобедренная трапеция, если $\alpha \neq 45^\circ$.
б) Найдите площадь четырехугольника $KBCM$.

5. На столе лежат 36 камешков. Микк делит эти камешки определенным способом на непустые кучки.
а) Сколькими различными способами он смог бы разделить эти 36 камешков по меньшей мере на две кучки, в каждой из которых было бы равное количество камешков?
б) Сколькими различными способами он смог бы разделить эти 36 камешков на три кучки так, чтобы в одной из них было всегда 10 камешков и эти три кучки отличались бы одна от другой количеством камешков?
в) Какое наибольшее возможное количество кучек можно получить, если бы он разделил эти 36 камешков так, чтобы все кучки отличались бы одна от другой количеством камешков?