

LAHENDUSED 12.KLASS

- 1. Vastus: Kaks võimalust (vt tabel),
kus kas $N = 5$ ja $M = 6$ või $N = 6$ ja $M = 5$**

7	14	9	20
18	11	1N	M
17	12	1M	N
8	13	10	19

Lahendus:

Tabelisse paigutatud täisarvude 5 kuni 20 summa on $\frac{(5+20) \cdot 16}{2} = 200$.

Seega, ühes reas (veerus) paikneva nelja arvu summa on $200 : 4 = 50$. Tähtedega tabelis on kümneliste kohal mitmeid kordi täht A ja ainult üks kord täht C.

Seega on $A = 1$, $C = 2$ ja $D = 0$. Asendame saadud numbrid tabelisse ja saame:

- Esimesest veerust saame, et $K + P = 15$.
- Teisest reast saame, et $P + 1 + N + M = 20$.
- Kolmandast reast saame, et $K + 2 + M + N = 20$.
- Lahutades 2. ja 3. reast saadud võrduste vastavad pooled, saame, et $P - K = 1$.
- Arvestades 1. veeru tulemust ja viimati saadut, leiame, et $P = 8$ ja $K = 7$.
- Liites 2. ja 3. reast saadud võrduste vastavad pooled, saame, et $P + K + 3 + 2(M + N) = 40$, st et $M + N = 11$.
- Viimasest veerust saame, et $M + N + L = 20$, millest viimast tulemust arvestades saame, et $L = 9$.
- Et $K = 7$ ja $L = 9$, saame 1. reast, et $K + B + L = 20$, st $B = 4$.
- Et $P = 8$ ja $L = 9$, saame viimasest reast, et $P + E + L = 20$, st $E = 3$.
- Et $M + N = 11$ ja vabaks on jäänud vaid numbrid 5 ja 6, tekib 2 võimalust: kas $N = 5$ ja $M = 6$ või $N = 6$ ja $M = 5$.

K	1B	L	20
1P	11	1N	M
1K	12	1M	N
P	1E	10	1L

7	14	9	20
18	11	15	6
17	12	16	5
8	13	10	19

7	14	9	20
18	11	16	5
17	12	15	6
8	13	10	19

Hindamine:

- | | |
|---|-----------|
| Leitud ühes reas (veerus) paikneva nelja arvu summa 50 | 1p |
| Leitud, et $A = 1$, $C = 2$ ja $D = 0$ | 1p |
| Leitud, et $E = 3$, $B = 4$, $K = 7$, $P = 8$, $L = 9$ mingis järjekorras | 3p |
| Leitud kaks võimalust kas $N = 5$ ja $M = 6$ või $N = 6$ ja $M = 5$ | 2p |
| | 7p |

2. Vastus: a) Miinimum on $-\frac{3}{16}$

Lahendus:

a) Et $g(f(x)) = 1 + (x^2 - x) = x^2 - x + 1$, siis

$F(x) = f[g(f(x))] = (x^2 - x + 1)^2 - (x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)(x^2 - x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$ Leiame tuletise:

$$F'(x) = [(x^2 - x + 1)(x^2 - x)]' = (x^2 - x + 1)' \cdot (x^2 - x) + (x^2 - x + 1)(x^2 - x)' = \\ = (2x - 1)(x^2 - x) + (x^2 - x + 1)(2x - 1) = (2x - 1)(2x^2 - 2x + 1)$$

Leiame tuletise nullkohad (võimalikud ekstreemumkohad). Et $2x^2 - 2x + 1 > 0$ iga reaalarvu x korral, siis $F(x) = 0$ parajasti siis, kui $2x - 1 = 0$, st kui $x = \frac{1}{2}$. See funktsioon kasvab, kui

$x > \frac{1}{2}$ ja kahaneb, kui $x < \frac{1}{2}$. Et kohal $x = \frac{1}{2}$ läheb kahanemine üle kasvamiseks, on tegemist funktsiooni $y = F(x)$ miinimumkohaga. Leiame funktsiooni minimum:

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1\right] \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{16}.$$

b) Leiame funktsiooni

$$G(x) = F(x) - f(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 - x) - (x^2 - x) = (x^2 - x)(x^2 - x + 1 - 1) = (x^2 - x)^2.$$

Kuna vaadeldav funktsioon on määratud kogu reaalarvude hulgal R ja $(x^2 - x)^2 \geq 0$ iga reaalarvu x korral, on funktsioon $G(x) = F(x) - f(x)$ kogu oma määramispiirkonnas mittenegatiivne.

Hindamine:

Leitud funktsiooni $y = F(x)$ avaldis	2p
Leitud selle funktsiooni võimalikud ekstreemumkohad	1p
Määratud ekstreemumi liik	1p
Leitud ekstremaalne väärtus	1p
Leitud funktsiooni $G(x) = F(x) - f(x)$ avaldis	1p
Näidatud, et see funktsioon on kogu oma määramispiirkonnas mittenegatiivne	1p
	7p

3. Vastus: a) ühtegi sobivat lahendust ei ole; b) 1987 või 2005

Lahendus:

Kasutades 3-ga jaguvuse tunnust, võime öelda, et arv ja tema numbrite summa annavad 3-ga jagamisel ühe ja sama jäägi.

a) Näitame, et summa $n + S(n) + S(S(n))$ alati jagub 3-ga:

Kui arv n jagub 3-ga, siis me saame esitada: $n = 3k$, $S(n) = 3m$ ja $S(S(n)) = 3p$ ja summa:

$$n + S(n) + S(S(n)) = 3k + 3m + 3p = 3(k + m + p)$$

Kui arv n 3-ga jagamisel annab jäägiks 1, siis me saame esitada: $n = 3k + 1$, $S(n) = 3m + 1$ ja $S(S(n)) = 3p + 1$ ja summa:

$$n + S(n) + S(S(n)) = 3k + 1 + 3m + 1 + 3p + 1 = 3k + 3m + 3p + 3 = 3(k + m + p + 1)$$

Kui arv n 3-ga jagamisel annab jäägiks 2, siis me saame esitada: $n = 3k + 2$, $S(n) = 3m + 2$ ja $S(S(n)) = 3p + 2$ ja summa:

$$n + S(n) + S(S(n)) = 3k + 2 + 3m + 2 + 3p + 2 = 3k + 3m + 3p + 6 = 3(k + m + p + 2)$$

Kuna 2026 ei jagu kolmega siis ühtegi sobivat n väärtust ei ole.

$$\text{b) } n \leq 2026, S(n) \leq 28, S(S(n)) \leq 10, S(S(S(n))) \leq 9$$

Kuna $n = 2026 - S(n) - S(S(n)) - S(S(S(n)))$, siis

$$n \geq 2026 - 28 - 10 - 9 = 1979$$

$$\text{Ehk } 2026 \geq n \geq 1979$$

Kasutades 9-ga jaguvuse tunnust, võime öelda, et arv ja tema numbrite summa annavad 9-ga jagamisel ühe ja sama jäägi.

Et arv 2026 9-ga jagamisel annab jäägiks 1, siis sobivad ainult need n väärtused, mis 9-ga jagamisel annavad jäägiks 7.

Arvud mis on selles vahemikus ja annavad 9-ga jagamisel jäägi 7 on:

1987, 1996, 2005, 2014, 2023.

Näitame, et õiget summat annavad vaid arvud 1987 ja 2005:

$$1987 + 25 + 7 + 7 = 2026$$

$$1996 + 25 + 7 + 7 = 2035 \neq 2026$$

$$2005 + 7 + 7 + 7 = 2026$$

$$2014 + 7 + 7 + 7 = 2035 \neq 2026$$

$$2023 + 7 + 7 + 7 = 2044 \neq 2026$$

Hindamine:

a)

Näidatud, et antud summa alati jagub 3-ga ja tehtud järeldus, et sobivat n väärtust ei ole 3p

b)

Tehtud hinnang arvudele n , $S(n)$, $S(S(n))$ ja $S(S(S(n)))$ 1p

Tähelepanek, et n 9-ga jagamisel peab jäägiks andma 7 1p

Antud hinnang arvule n ja leitud kõik sobivad arvud sellest vahemikust 1p

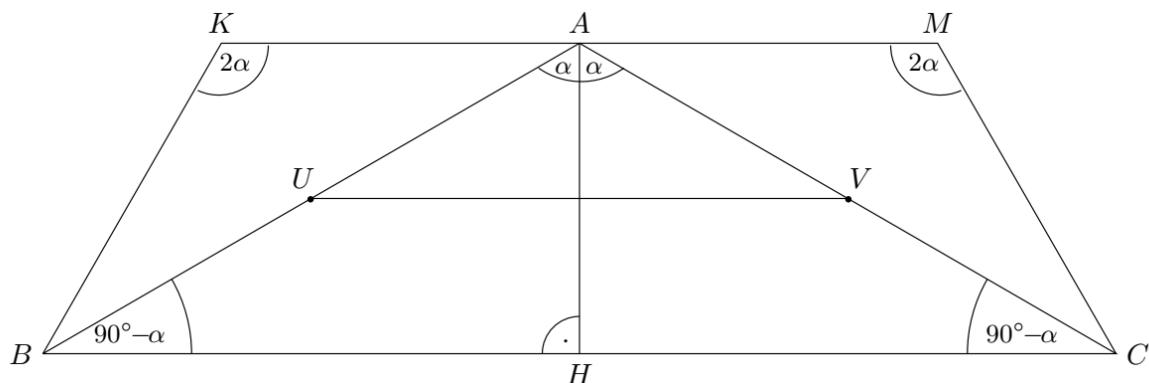
Antud õige vastus 1p
7p

4. Vastus: b) $\frac{p^2 \cdot (2 \sin^2 \alpha + 1) \cdot \cos \alpha}{2 \sin^3 \alpha}$

Lahendus:

Kolmnurkade võrdhaarsusest järeldub, et $|AB| = |AC|$ ja $|AK| = |KB|$, $|AM| = |MC|$.

Asugu konkreetsuse mõttes punkt U haaral AB ja punkt V haaral AC (vt joonist).



Võrdhaarsusest tulenevalt on kõrgus AH ühtlasi ka tipunurga BAC poolitaja. Seega saame, et $\angle BAH = \angle HAC = \alpha$ ja $\angle ABH = \angle HCA = 90^\circ - \alpha$. Et võrdhaarsete kolmnurkade AKB ja AMC tipunurkade suurus on samuti 2α ja alused AB ja AC on võrdse pikkusega, on need kolmnurgad võrdsed ning nende kolmnurkade alusnurkade KAB , KBA , MAC ja MCA suurus on samuti $90^\circ - \alpha$.

Näitame nüüd, et tipp A asub sirgel KM . Vaatame nurka KAM . Et $\angle KAH = \angle KAB + \angle BAH = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$ ja $\angle MAH = \angle MAC + \angle CAH = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$, siis $\angle KAM = \angle KAH + \angle MAH = 180^\circ$, mis ütlebki, et punktid K , A ja M asuvad ühel sirgel KM ja kõrgus AH on sirgete KM ja BC ühine ristlõik. Seega on nelinurgas $KBCM$ vastasküljed KM ja BC paralleelsed. Et $\angle BKA = \angle AMC = 2\alpha$, on nelinurk $KBCM$ võrdhaarne trapets parajasti siis, kui $\alpha \neq 45^\circ$. (Vastasel juhul on tegu ristkülikuga).

Leiame trapetsi pindala. Kuna UV on kolmnurga ABC kesklõik, on $|BH| = |HC| = p$ ja trapetsi $KBCM$ ühe aluse pikkus on $|BC| = 2p$. Kolmnurgast AHC leiame, et $|AH| = p \cdot \cot \alpha$ ja $|AC| = \frac{p}{\sin \alpha}$. Kolmnurgast AMC aga leiame, et $|AM| = \frac{|AV|}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AC|}{\sin \alpha} = \frac{p}{2 \sin^2 \alpha}$. Seega, trapetsi $KBCM$ teise aluse pikkus on $|KM| = 2 \cdot |AM| = \frac{p}{\sin^2 \alpha}$ ja selle nelinurga $KBCM$ pindala

$$\text{on } S = \frac{|BC| + |KM|}{2} \cdot |AH| = \frac{2p + \frac{p}{\sin^2 \alpha}}{2} \cdot p \cdot \cot \alpha = \frac{p^2 \cdot (2 \sin^2 \alpha + 1) \cdot \cos \alpha}{2 \sin^3 \alpha}.$$

Hindamine:

Tehtud õige joonis	1p
Näidatud, et punkt A asub sirgel KM	1p
Näidatud, et nelinurk $KBCM$ on võrdhaarne trapets, kui $\alpha \neq 45^\circ$.	2p
Leitud vajalike lõikude pikkused ja avaldatud nelinurga $KBCM$ pindala	<u>3p</u>
	7p

5. Vastus: a) 8 b) 11 c) 8

Lahendus:

a) Saab jaotada m kuhja, millest igaühes on n kivist parajasti siis, kui $m \cdot n = 36$ ja $m \geq 2$. Kõik 8 võimalust on kirjeldatud tabelis

m	36	18	12	9	6	4	3	2
n	1	2	3	4	6	9	12	18

b) Kui ühes kuhjas on 10 kivist, siis kahes ülejäänud kuhjas on kokku 26 kivist, kusjuures vähemalt ühes neist kahes ei tohi olla 10 kivist ega ka 13 kivist. Kui ühes kuhjas on m kivist, siis teises kuhjas on $n = 26 - m$ kivist. Võimalused on esitatud tabelis

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12
n	25	24	23	22	21	20	19	18	17	15	14

c) Olgu kiviüksed n kuhjas nii, et kõik kuhjad erineksid üksteisest kiviüksede arvu poolest. Mida vähem on igas kuhjas kiviüksi, seda rohkem kuhjakesi on. Kõige rohkem saab tekkida kuhjakesi, kui neis on kive 1, 2, 3, ..., $n - 1$ ja n . Kivide arv sellisel juhul oleks $\frac{(n+1) \cdot n}{2}$. Et käesoleval juhul on 36 kivi, saame võrrandi $\frac{(n+1) \cdot n}{2} = 36$ ehk võrrandi $n^2 + n - 72 = 0$, mille ainus positiivne lahend $n = 8$.

Hindamine:

Leitud vastus 8 küsimusele a)	2p
Leitud vastus 11 küsimusele b)	2p
Leitud vastus 8 küsimusele c)	<u>3p</u>
	7p