

LXXIII олимпиада по математике Эстонии
ШКОЛЬНЫЙ ТУР ТАЛЛИННА
Таллинн, 7 января 2026 года
XI класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найдите наибольшее возможное целое число, на которое делятся нацело как выражение $A = 3^9 - 3^3$, так и выражение $B = n^9 - n^3$ при любом целом значении числа n .

2. Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} a + b = a^2 - b^2 \\ a - b > a \cdot b \end{cases}$.

3. 3.1. Докажите тождество $4 - 3\sin^2 2\alpha = 4 \cdot (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha)$.
3.2. Найдите значение выражения $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$, если
 - а) $\sin \alpha + \cos \alpha = 2$;
 - б) $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$.

4. Величины двух углов треугольника ABC относятся как $1 : 2$, а длины сторон треугольника, противолежащие данным углам, относятся как $1 : \sqrt{3}$. Из вершины самого большого угла C этого треугольника к противолежащей стороне проведены высота CH , медиана CM и биссектриса CN (точки H, M и N лежат на прямой AB).
 - а) Найдите отношение величин углов HCN и HCM .
 - б) Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника HCN равна 3 квадратным единицам.

5. а) Возможно ли ребра 2025-угольной призмы выкрасить в синий, черный и белый цвет так, чтобы каждая грань содержала все три цвета и из каждой вершины выходили бы ребра, выкрашенные в три различных цвета?
б) Возможно ли это сделать в 2026-угольной призме?