

LAHENDUSED 11.KLASS

1. Vastus: 504.

Lahendus:

Lahutame avaldised A ja B tegureiks:

$$A = 3^9 - 3^3 = 3^3(3^6 - 1) = 3^3(3^3 - 1)(3^3 + 1) = 27 \cdot 26 \cdot 28 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13;$$

$$B = n^9 - n^3 = n^3(n^3 - 1)(n^3 + 1).$$

Et arvud $n^3 - 1$, n^3 ja $n^3 + 1$ on mistahes täisarvu n korral kolm järjestikkust täisarvu, siis jagub arv B iga täisarvu n korral kindlasti arvudega 2 ja 3.

Kui $n = 2$, siis $B = 2^9 - 2^3 = 2^3(2^3 - 1)(2^3 + 1) = 8 \cdot 7 \cdot 9 = 504$. Arv A jagub arvuga 504. Seega, suurim arvude A ja B ühine jagaja, mistahes täisarvu n korral, ei saa olla suurem kui 504.

- Näitame, et B jagub arvuga 8 iga täisarvu n korral. Kui n on paarisarv, siis n^3 jagub kindlast arvuga 8. Kui n on paaritu arv, siis $n^3 - 1$ ja $n^3 + 1$ on kaks järjestikkust paarisarvu, millest üks jagub kindlasti arvuga 2 ja teine arvuga 4, st arv B jagub arvuga 8 iga täisarvu n korral.
- Näitame, et B jagub arvuga 9 iga täisarvu n korral. Kui n jagub arvuga 3, siis n^3 jagub kindlast arvuga $3^3 = 27$ ja seega ka arvuga 9. Kui $n = 3k \pm 1$, siis $n^3 = (3k \pm 1)^3 = 27k^3 \pm 27k^2 + 9k \pm 1 = 9 \cdot (3k^3 \pm 3k^2 + k) \pm 1$.

Seega juhul $n = 3k \pm 1$ jagub $n^3 \mp 1$, ja ka arv B , kindlasti arvuga 9 iga täisarvu n korral.

- Näitame, et B jagub arvuga 7 iga täisarvu n korral. Olgu r jääk, mis tekib arvu n jagamisel arvuga 7, st $n = 7k + r$, kus k on mingi täisarv. Sel juhul $n^3 = (7k + r)^3 = 7^3 k^3 + 3 \cdot 7^2 k^2 \cdot r + 3 \cdot 7k \cdot r^2 + r^3 = 7 \cdot (49k^3 + 3 \cdot 7k^2 \cdot r + 3 \cdot k \cdot r^2) + r^3$.

Seega, arvu n^3 jaguvus arvuga 7 sõltub arvu r^3 jäägist m jagamisel arvuga 7, kui $r^3 = 7p + m$ ja p on täisarv. Leiame need võimalikud jäägid m ja kanname tabelisse

r	0	1	2	3	4	5	6
r^3	0	1	8	27	64	125	216
m	0	1	1	6	1	6	6

Näeme, et r^3 annab jagamisel arvuga 7 ühe jääkidest 0, 1 või 6. Saame nüüd, et kolmest järjestikkusest arvust $n^3 - 1$, n^3 ja $n^3 + 1$ jagub kindlasti üks, ja seega ka arv B , arvuga 7 iga täisarvu n korral.

Seega jagub arv B arvuga 504 iga täisarvu n korral ja see arv 504 on suurim täisarv, millega jaguvad nii arv A kui ka arv B .

Hindamine:

Arvude A ja B tegurdamine	1p
Põhjendatud, et 504 on avaldise B suurim võimalik jagaja	1p
Näidatud, et B jagub arvuga 8 iga täisarvu n korral	1p
Näidatud, et B jagub arvuga 9 iga täisarvu n korral	1p
Näidatud, et B jagub arvuga 7 iga täisarvu n korral	1p
Põhjendatud, et 504 on suurim võimalik A ja B ühine jagaja	<u>1p</u>
	7p

2. Vastus: $(0; -1); (1; 0)$ ja täisarvude paarid $(a; -a)$, kus $a < -2$ või $a > 0$

Lahendus:

Teisendades esimest võrrandit, saame, et $a + b = (a - b)(a + b)$, mis teiseneb samaväärseks võrrandiks $(a + b)(1 - a + b) = 0$.

Kui $a + b = 0$, st kui $b = -a$, saame süsteemi teisest võrratusest võrratuse $a^2 + 2a > 0$, mida rahuldavad kõik täisarvud $a < -2$ või $a > 0$. Seega on süsteemi lahenditeks täisarvude paarid $(a; -a)$, kus $a < -2$ või $a > 0$.

Kui aga $1 - a + b = 0$, st kui $b = a - 1$, siis süsteemi teisest võrratusest saame, et $a^2 - a - 1 < 0$, mille lahendid kuuluvad vahemikku $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$, kus täisarvudest asuvad ainult arvud $a = 0$ ja $a = 1$.

Seega, süsteemi lahenditeks on ka paarid $(0; -1)$ ja $(1; 0)$.

Hindamine:

Võrrandi esitamine korrutisena, mis võrdub nulliga	1p
Tingimusest $a + b = 0$ leitud süsteemi lahendid	3p
Tingimusest $1 - a + b = 0$ leitud süsteemi lahendid	<u>3p</u>
	7p

3. Vastus: a) Sellist ei ole võimalik leida; b) $\frac{1}{4}$

Lahendus:

Tõstes tõese võrduse $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ mõlemad pooled kuupi, saame, et

$$\begin{aligned} 1 &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 = \sin^6 \alpha + 3 \sin^4 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha + \cos^6 \alpha = \\ &= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

Seega $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ ja tõestatava võrduse parem pool on esitatav kujul $4 \cdot (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 4 - 12 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 4 - 3 \cdot (2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 = 4 - 3 \sin^2 2\alpha$, mis võrdub tõestatava võrduse vasaku poolega m.o.t.t.

a) Kuna $\sin \alpha \leq 1$ ja $\cos \alpha \leq 1$ nurga α mistahes väärtuse korral ja ei leidu sellist nurka α , mille korral $\sin \alpha = \cos \alpha = 1$, on juhul a) kirjeldatud olukord võimatu ja küsitud avaldise väärtust ei saa leida.

b) Tõstes võrduse $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$ mõlemad pooled ruutu, saame, et $\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 2$, millest järeldub, et antud juhul $\sin 2\alpha = 1$. Kuna eelneva põhjal $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$, siis antud juhul

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

Hindamine:

Tõestatud nõutud võrratus

3p

Põhjendatud, miks antud avaldisel juhul a) väärtus puudub

2p

Leitud juhul b) avaldise väärtus $\frac{1}{4}$

2p

7p

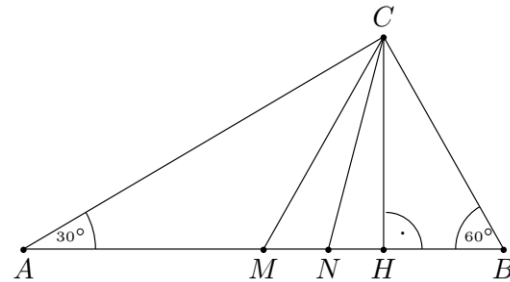
4. Vastus: a) 1 : 2 b) $\frac{4\sqrt{3}}{\tan 15^\circ}$.

Lahendus:

Kui kolmnurga ABC kahe nurga suurused on α ja β , aga nende nurkade vastaskülgede pikkused vastavalt a ja b ning $\alpha : \beta = 1 : 2$ ja $a : b = 1 : \sqrt{3}$, siis $\beta = 2\alpha$ ja $b = \sqrt{3} \cdot a$. Kasutades siinusteoreemi, saame, et $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, millest eespoolsaadud võrdusi arvestades saame, et

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{\sin 2\alpha} \text{ ehk } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}.$$

Seega, antud kolmnurga korral $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $\alpha = 30^\circ$ ning $\beta = 60^\circ$. Järelikult on selle kolmnurga kolmanda nurga suurus $\gamma = 90^\circ$ ja see nurk asub tipu C juures. Olgu konkreetsuse mõttes nurk suurusega $\alpha = 30^\circ$ tipu A juures ning nurk suurusega $\beta = 60^\circ$ tipu B juures (vt joonist).



a) Tõmbame suurima nurga tipust C vastasküljele kõrguse CH ja mediaani CM . Et täisnurkses kolmnurgas ABC on $|AM| = |MC|$, siis $\angle ACM = \angle CAM = 30^\circ$.

Täisnurksest kolmnurgast CHB saame, et $\angle HCB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Seega

$\angle HCM = \gamma - \angle HCB - \angle ACM = 90^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 30^\circ$. Kuna nurgapoolitaja CN poolitab nurga ACB , siis $\angle ACN = \angle NCB = 90^\circ : 2 = 45^\circ$ ja $\angle HCN = \angle MCN = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$. Järelikult poolitab CN ka nurga MCH ja CN asub mediaani ning kõrguse vahel. Seega $\angle HCN : \angle HCM = 15^\circ : 30^\circ = 1 : 2$.

b) Kuna kolmnurkadel ABC ja HCN on ühine kõrgus CH , siis $S_{ABC} : S_{HCN} = |AB| : |HN|$.

Et $S_{HCN} = 3$, siis $S_{ABC} = 3 \cdot |AB| : |HN|$.

Tähistagu h kõrguse CH pikkust. Täisnurksest kolmnurgast HCN leiame, et $|HN| = h \cdot \tan 15^\circ$.

Kuna $|AB| = |AH| + |HB|$ ja täisnurksetest kolmnurkadest AHC ja BHC saame vastavalt, et

$$|AH| = h \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3} \cdot h \text{ ja } |HB| = h \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot h, \text{ siis}$$

$$|AB| = |AH| + |HB| = \sqrt{3} \cdot h + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot h = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot h.$$

$$\text{Seega on } S_{ABC} = 3 \cdot |AB| : |HN| = 3 \cdot \frac{4h\sqrt{3}}{3} : (h \cdot \tan 15^\circ) = \frac{4\sqrt{3}}{\tan 15^\circ}.$$

Hindamine:

Leitud kolmnurga ABC nurkade suurused	2p
Tehtud õige joonis, kus CH , CN ja CM paiknevad õiges järjekorras	1p
Leitud nurkade HCN ja HCM suuruste suhe	2p
Arvutatud kolmnurga ABC pindala	<u>2p</u>
	7p

5. Vastus: a) on võimalik; b) ei ole võimalik

Lahendus:

a) On võimalik.

Värvime ülemise põhja servad kolme värviga kordamööda: sini-must-valge.

Kuna 2025 jagub 3ga, siis saame seda teha.

Sümmeetriliselt värvime ka alumise põhja servad.

Nüüd tulevad igas tipus kokku kaks erinevast värvist põhiserva. Seega saab külgserva värvida kolmanda värviga, mis erineb neist kahest.

Kuna värvime külgservad kolmanda värviga, siis on igal tahul kõik kolm värvi servadena esindatud ja igas tipus tulevad kokku kolme erinevat värvi serva.

b) Ei ole võimalik, kuna 2026 ei jagu 3ga.

Oletame vastuväiteliselt, et nõutud värvimine on võimalik.

Kuna ühest tipust väljuvad servad peavad olema erinevat värvi, siis peavad kaks kõrvuti asuvat põhiserva olema eri värvi ning kolmas serv (külgserv), mis sellest tipust väljub, peab olema kolmandat värvi.

Olgu näiteks kaks kõrvuti asuvat põhiserva sinine ja must ning kolmas (külgserv) valge.

Vaatleme prisma ühte külgtahku, mille kaks serva on ülalkirjeldatult määratud: ülemine põhiserv on sinine ja üks külgserv on valge. Alumine põhiserv võib olla ainult sinine või must — muidu väljub ühest tipust kaks valget serva. Vaatleme mõlemat varianti.

Olgu vaadeldava külgtahu ülemine ja alumine põhiservad erinevat värvi, st alumine põhiserv on must. Siis peab neljas serv selles tahus olema samuti valge (muul juhul väljub ühest tipust kaks ühesuguse värviga serva). Kõrvaloleval külgtahul peavad põhiservad samuti olema sinine ja must: nüüd on ülemine põhiserv must, alumine põhiserv sinine ning järgmine külgserv jälle valge jne. Saame sellise värvimise, kus kõik külgservad on valged ja põhjade servade värvid vahelduvad sinine–must. Kuid selline värvimine ei rahulda tingimust, sest põhja tahul puuduvad valged servad.

Olgu nüüd vaadeldava külgtahu ülemise ja alumise põhiservad sama värvi (näiteks, sinised). Et selles tahus esineksid kõik kolm värvi, peab neljas serv olema must. Lähiskülgtahul peavad põhiservad olema valged (muidu väljub ühest tipust kaks ühesuguse värviga serva) ja teine külgserv peab olema sinine. Järgneval külgtahul peavad mõlemad põhiservad olema mustad ning järgmine külgserv valge jne. Tulemuseks on punktis a) kirjeldatud värvimine, kus põhjades servad on sümmeetriliselt värvitud ja kolm värvi vahelduvad sinine–must–valge. Kuna prisma 2026-nurkne ja 2026 ei jagu 3-ga, tekib vastuolu ning tingimustele vastavat värvimist ei saa teostada.

Hindamine:

- a) Kirjeldatud, kuidas peab servi värvima et värvimine vastaks tingimustele 3p
- b) Põhjendatud, et nõutud värvimine ei ole võimalik 4p
7p