

LAHENDUSED 10.KLASS

1. Vastus: 20%

Lahendus:

Olgu x küla elanike arv, kes kannab alati punaseid mütse ja y kannab alati rohelisi mütse ning n päkapikku tahab kolida Santa külla.

Kui uued küla elanikud kolivad Santa külla, siis kokku on külas $x + y + n$ elanikku.

Et kui uued küla elanikud hakkavad kandma punaseid mütse, siis punaseid mütse kandvate päkapikkude osakaal oleks 36% küla elanikest, siis

$$x + n = 0,36(x + y + n)$$

Et kui uued küla elanikud hakkavad kandma rohelisi mütse, siis rohelisi mütse kandvate päkapikkude osakaal oleks 84% küla elanikest, siis

$$y + n = 0,84(x + y + n)$$

Saime süsteemi: $\begin{cases} x + n = 0,36(x + y + n) \\ y + n = 0,84(x + y + n) \end{cases}$, kust

$$\begin{cases} 0,64x + 0,64n = 0,36y \\ 0,16y + 0,16n = 0,84x \quad | \cdot (-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,64x + 0,64n = 0,36y \\ -0,64y - 0,64n = -3,36x \quad | + \end{cases}$$

$$0,64x - 0,64y = 0,36y - 3,36x$$

Same: $y = 4x$

Ehk praegu elab Santa külas: $x + y = x + 4x = 5x$,

Nendest kannavad punaseid mütse: $\frac{x}{5x} = \frac{1}{5} = 0,2$ ehk 20%

Hindamine:

Tähistatud päkapikkude arvud ja koostatud võrrandid	3p
Leitud seos x ja y vahel	3p
Leitud õige vastus 20%	<u>1p</u>
	7p

Märkus: Kui antud vaid õige vastus: 2p.

2. Vastus: Adalbert – abt; Bruno – rüütel; Clement – munk; Daniel – kaupmees.

Lahendus:

Kui Adalberti vasakul käel istub rüütel (väide 1), siis rüütli vastas (Adalberti paremal käel) ei saa istuda Bruno, kelle vastas istub munk (väide 2).

Bruno ei saa istuda ka Adalberti vastas, sest Clement ja Daniel istuvad kõrvuti (väide 3). Seega istub Bruno Adalberti vasakul käel ja on rüütel ning Adalberti paremal käel istub munk.

Adalbert ei saa olla kaupmees, sest tema vasakul käel istub Bruno, kelle nimi ei lõppe tähega „t“ (väide 4).

Jääb üle ainus võimalus, et Adalbert on abt ja tema vastas on kaupmees.

Seega istub kaupmehe vasakul käel Clement (väide 4), kes on munk ja Daniel, kes istub Adalberti vastas, on kaupmees.

Hindamine:

Kolme vastavuse leidmise eest	6p
(Kolmest vastavusest ühe õige leidmise eest 2 p)	
Neljanda vastavuse eest	<u>1p</u>
	7p

Märkus: Antud vaid õige vastus: 2p.

3. Vastus: 143143; 167334.

Lahendus:

Ülesande tingimuste kohaselt $N = 1000 \cdot A + B$.

Et N jagub korrutisega $A \cdot B$, siis N jagub nii arvuga A kui ka arvuga B .

Summa $1000 \cdot A + B$ jaguvusest arvuga A järeldub, et kolmekohaline arv B jagub kolmekohalise arvuga A . Seega leidub naturaalarv m nii, et $B = m \cdot A$, kus $0 < m < 10$.

Summa $1000 \cdot A + B$ jaguvusest arvuga B järeldub, et korrutis $1000 \cdot A$ jagub korrutisega $m \cdot A$, mis on võimalik vaid siis, kui arv 1000 jagub arvuga m , st $m \in \{1; 2; 4; 5; 8\}$. Vaatame neid juhtumeid eraldi.

- Kui $m = 1$, siis $A = B$ ja $N = 1001 \cdot A$, mis jagub korrutisega $A \cdot A$. Seega, arv 1001 on arvu A kordne. Et $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ ja selle ainus kolmekohaline tegur on 143, siis $A = B = 143$ ning üks otsitavatest arvudest on $N = 143143$.
- Kui $m = 2$, siis $B = 2A$ ja $N = 1002 \cdot A$, mis jagub korrutisega $2 \cdot A \cdot A$. Seega jagub arv 501 arvuga A . Et $501 = 3 \cdot 167$ ja selle ainus kolmekohaline tegur on 167, siis $A = 167$ ja $B = 334$ ning üks otsitavatest arvudest on ka $N = 167334$.
- Kui $m = 4$, siis saame, et $A = 251$ ja $B = 1004$, mis ei ole enam kolmekohaline arv. Analoogiliselt saame $m = 5$ korral, et $A = 201$, kuid $B = 1005 > 1000$. Ka $m = 8$ korral saame, et $A = 126$, aga $B = 1008 > 1000$. Seega leidub kaks nõutud omadustega kuuekohalist arvu 143143 ja 167334.

Hindamine:

Avaldatud arv N arvude A ja B abil või mõnel muul vajalikul kujul	1p
Järeldatud, et arv N jagub nii arvuga A kui ka arvuga B	1p
Saadud, et arv B jagub arvuga A , st leidub naturaalarv m nii, et $B = m \cdot A$, kus $0 < m < 10$	1p
Leitud $m = 1$ ja $m = 2$ korral sobivad kaks arvu 143143 ja 167334	2p
Näidatud, et juhtudel, kus $2 < m < 10$, selliseid arve ei leidu	<u>2p</u> 7p

4. Vastus: $\frac{OE}{OD} = \frac{1}{6}$.

Lahendus:

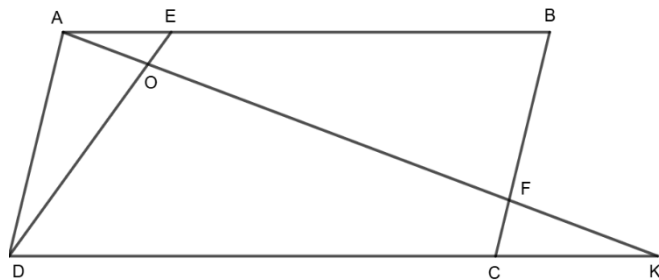
Pikendame lõiku AF kuni selle lõikumiseni külje CD pikendusega.

Sirged AF ja DC lõikuvad punktis K .

Olgu $|AE| = 2x$ ja $|EB| = 7x$.

Ning $|CF| = y$ ja $|BF| = 3y$.

Et $\angle AFB = \angle KFC$ (tippnurgad) ja $\angle ABF = \angle KCF$ (paralleelsete sirgete AB ja CD lõikamisel kolmanda sirgega AK tekib paar võrdseid põiknurki), siis kolmnurgad ABF ja KCF on sarnased.



Sarnastest kolmnurkadest ABF ja KCF saame: $\frac{AB}{KC} = \frac{BF}{CF}$, ehk $\frac{9x}{KC} = \frac{3y}{y} \Rightarrow |KC| = 3x$.

Et $\angle AOE = \angle DOK$ (tippnurgad) ja $\angle AEO = \angle ODK$ (paralleelsete sirgete AB ja CD lõikamisel kolmanda sirgega AK tekib paar võrdseid põiknurki), siis kolmnurgad AOE ja KOD on sarnased.

Sarnastest kolmnurkadest AOE ja KOD saame: $\frac{OE}{OD} = \frac{AE}{KD}$, ehk $\frac{OE}{OD} = \frac{2x}{12x} = \frac{1}{6}$.

Hindamine:

Tehtud abijoonis ja lõik AF pikendatud	2p
Põhjendatud, et kolmnurgad ABF ja KCF on sarnased	1p
Kolmnurkade sarnasusest lõigu KC pikkuse leidmine	1p
Põhjendatud, et kolmnurgad AOE ja KOD on sarnased	1p
Leitud suhe $OE : OD$	<u>2p</u>
	7p

5. Vastus: 45, 108, 171, 243 või 297.

Lahendus:

Olgu x pallide arv, mille Peeter võttis esimesel korral esimesest hunnikust, teisest hunnikust y palli ja kolmandast hunnikust $2z$ palli. Kokku sai võetud: $x + y + 2z$ palli.

Siis esimeses hunnikus oli alguses $11x$ palli, teises - $14y$ palli ja kolmandas - $9z$ palli.

Ja hunnikutes jäi alles $10x$, $13y$, $7z$ palli.

Teisel korral võttis Peeter $3x + 6y + z$ palli ja kokku sai võetud $4x + 7y + 3z$ palli.

Hunnikutes jäi alles $7x$, $7y$, $6y$ palli.

Seejärel võttis ta veel 20 palli igast hunnikust ja nüüd jäänud ja võetud pallide arv on 1013:

$$(7x - 20) + (7y - 20) + (6z - 20) = 1013$$

$$(4x + 20) + (7y + 20) + (3z + 20) = 1013$$

$$\text{Kust saame: } \begin{cases} 7x + 7y + 6z = 1073 \\ 4x + 7y + 3z = 953 \end{cases}$$

$$3x + 3z = 120$$

$$x + z = 40$$

$$z = 40 - x$$

$$\text{Et } 11x + 14y + 9z = 2026, \text{ siis } 2026 - 11x - 9z = 14y$$

$$2026 - 11x - 9(40 - x) = 14y$$

$$1666 - 2x = 14y$$

$$833 - x = 7y$$

Kuna y on täisarv, siis $833 - x$ peab jaguma 7-ga.

Kuna 833 jagub 7-ga, siis ka x peab jaguma 7-ga.

Teades, et $z = 40 - x$ ja $x \neq 0$ (esimesel korral võetud pallide arv ei või olla 0), leiame z võimalikud väärtused:

Kui $x = 7$, siis $z = 33$ ja kolmandas hunnikus oli $9z$ ehk 297 palli.

Kui $x = 14$, siis $z = 26$ ja kolmandas hunnikus oli 234 palli.

Kui $x = 21$, siis $z = 19$ ja kolmandas hunnikus oli 171 palli.

Kui $x = 28$, siis $z = 12$ ja kolmandas hunnikus oli 108 palli.

Kui $x = 35$, siis $z = 5$ ja kolmandas hunnikus oli 45 palli.

Hindamine:

Tähistatud võetud pallide arvud ning avaldatud muutujate kaudu hunnikutes alles jäänud pallide arvud	2p
Koostatud võrrandid	1p
Leitud seos hunnikutest võetud pallide arvu vahel (x ja z ning x ja y vahel)	2p
Põhjendatud, et esimesest hunnikust esimesel korral võetud pallide arv peab jaguma 7-ga	1p
Leitud kolmanda hunniku pallide arvu kõik võimalikud variandid	<u>1p</u>
	7p