

LAHENDUSED 8. KLASS

1. Vastus: Kahekohalise arvu $\overline{IJ}$ väärtus saab olla vaid 90.

Lahendus:

Kasutusel on 10 tähte ja seega kõik 10 numbrit. Järelikult peab mingile tähele vastama number 0. Kuna meil on viis kahekohalist arvu, siis number 0 peab vastama tähele, mis tähistab mingis arvus ühelisi. Kui B, D, F või H oleks 0, siis peaks summa $\overline{IJ}$ üheliste number ühtima mõne liidetava üheliste numbriga. Seega on ainus võimalus, et $J = 0$.

Saame kirjutada, et $B + D = F + H = 10$ ja $A + C + 1 = E + G + 1 = I$

Et kõikidele tähtedele vastavate numbrite summa on $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$, siis

$$\begin{aligned} 45 &= A + B + C + D + E + F + G + H + I + J = \\ &= B + D + F + H + A + C + 1 - 1 + E + G + 1 - 1 + I + J = \\ &= 20 + I + (I - 1) + (I - 1) = 18 + 3 \cdot I. \end{aligned}$$

Saime, et $45 = 18 + 3 \cdot I$, millest $I = 9$.

Ülejäänud tähtede asendamiseks numbritega on erinevaid võimalusi, milledest üks on näiteks: $54 + 36 = 18 + 72 = 90$.

Hindamine:

Põhjendatud, et $J = 0$:	2p
Näidatud, et I saab olla 9:	1p
Näidatud, et I ei saa olla teisi väärtusi, kui vaid 9:	3p
Näidatud, et tähtede selline asendamine numbritega on võimalik:	<u>1p</u>
	7p

Märkus: Kui on antud vaid õige vastus 90, anda vastuse eest 2p.

Kui on näidatud, et kui $\overline{IJ}$ on 90 saab teisi tähti numbritega vastavalt asendada, anda näite eest: 1p

2. Vastus: Ristküliku ümbermõõt saab olla: 28 cm, 25 cm ja 22 cm.

Lahendus:

Olgu ristküliku külgede pikkused a cm ja b cm.

Siis sellest, et mingi kahe külje pikkuste summa on 11 cm, saame võimalused, et kas $2a = 11$ cm või $a + b = 11$ cm. Võimalus $2b = 11$ cm on samaväärne esimese võimalusega.

Sellest, et mingi kolme külje pikkuste summa on 19,5 cm, saame võimalused, et kas $2a + b = 19,5$ cm või $a + 2b = 19,5$ cm.

Neist kokku saame neli võimalust:

1) $2a = 11$ cm, $2a + b = 19,5$ cm,

2) $2a = 11$ cm, $a + 2b = 19,5$ cm,

3) $a + b = 11$ cm, $2a + b = 19,5$ cm,

4) $a + b = 11$ cm, $a + 2b = 19,5$ cm.

Neist saame, et 1) $a = 5,5$ cm ja $b = 8,5$ cm, 2) $a = 5,5$ cm ja $b = 7$ cm,

3) $a = 8,5$ cm ja $b = 2,5$ cm, 4) $b = 8,5$ cm ja $a = 2,5$ cm.

Ristkülikute ümbermõõdud oleks vastavalt $2(5,5 \text{ cm} + 8,5 \text{ cm}) = 28$ cm,

$2(5,5 \text{ cm} + 7 \text{ cm}) = 25$ cm, $2(8,5 \text{ cm} + 2,5 \text{ cm}) = 22$ cm ja näeme, et viimasel juhul saame sama ümbermõõdu, mis eelneval juhul.

Hindamine:

Kirja pandud kõik võimalused, mis tulevad ristküliku kahe külje pikkuste summast: 1p

Kirja pandud kõik võimalused, mis tulevad ristküliku kolme külje pikkuste summast: 1p

Välja toodud neli võimalust (või siis kolm ja märgitud, et kaks neist on samaväärsed): 2p

Leitud ristküliku külgede pikkused kõikidel võimalustel: 2p

Leitud kõik võimalikud ümbermõõdud: 1p

7p

Märkus: Antud vastuseks vaid kolm võimalikku ümbermõõtu: 2p

Antud vastuseks kaks võimalikku ümbermõõtu: 1p

3. Vastus: Nurk ABC on suurusega 40° .

Lahendus:

Olgu otsitav nurk $\angle BAC = x$.

Kuna $DE = AE$, siis kolmnurk AED on võrdhaarne, mille alusnurgad on võrdsed, st $\angle ADE = \angle DAE = x$.

Kolmnurk CAD on samuti võrdhaarne (on teada, et $AD = AC$). Ka selle alusnurgad on võrdsed:

$$\angle ACD = \angle ADC = \frac{180^\circ - x}{2} = 90^\circ - \frac{x}{2}.$$

Nurk DEC on teravnurk ja on kolmnurga AED välisnurk. Seega $\angle DEC = \angle ADE + \angle DAE = 2x$

Järelikult joonisel on kaheksa järgmist teravnurka:

$$\angle BAC = x, \angle ADE = x, \angle EDC = 90^\circ - \frac{x}{2} - x = 90^\circ - \frac{3x}{2}, \angle ADC = 90^\circ - \frac{x}{2},$$

$$\angle ACD = 90^\circ - \frac{x}{2}, \angle ABC = 90^\circ - x, \angle BCD = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} \text{ ja } \angle DEC = 2x.$$

Nende teravnurkade suuruste summa on

$$x + x + \left(90^\circ - \frac{3x}{2}\right) + \left(90^\circ - \frac{x}{2}\right) + \left(90^\circ - \frac{x}{2}\right) + (90^\circ - x) + \frac{x}{2} + 2x = 360^\circ + x.$$

Võrdusest $360^\circ + x = 400^\circ$ järeldame, et otsitav nurk $x = 40^\circ$.

Hindamine:

Otsitava nurga kaudu avaldatud võrdhaarsete kolmnurkade AED ja CAD

alusnurkade suurused: 2p

Nurga DEC avaldamine otsitava nurga kaudu 2p

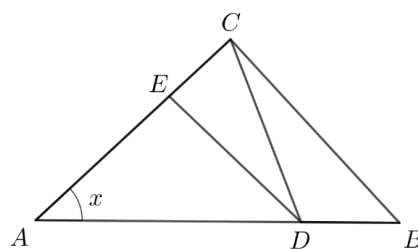
Otsitava nurga kaudu avaldatud kolmnurga CBD teravnurkade suurused: 1p

Otsitava nurga kaudu avaldatud kaheksa joonisel oleva teravnurga suuruste summa: 1p

Järeldatud nurga BAC suurus: 1p

7p

Märkus: Antud vaid õige vastus: 2p



4. Vastus: Mati võis sündida aastal 1998 või aastal 2016.

Lahendus 1:

Olgu Mati sünniaasta $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$.

Seega $1000a + 100b + 10c + d + a + b + c + d = 2025$, millest
 $1001a + 101b + 11c + 2d = 2025$.

Kui $a = 1$, siis $1001 + 101b + 11c + 2d = 2025$, millest
 $101b + 11c + 2d = 2025 - 1001 = 1024$.

Näeme, et sel juhul b peab olema 9. Saame $909 + 11c + 2d = 1024$,
millest $11c + 2d = 115$.

Näeme, et ka see võrdus saab tõene olla vaid siis kui $c = 9$. Seega $2d = 115 - 11 \cdot 9 = 16$,
millest $d = 8$.

Oleme saanud, et Mati sünniaastaks sobib 1998.

Kui $a = 2$, siis $2002 + 101b + 11c + 2d = 2025$,
millest $101b + 11c + 2d = 2025 - 2002 = 23$.

Näeme, et sel juhul $b = 0$ ja $11c + 2d = 23$.

Saame, et ainus võimalus on, et $c = 1$ ja $d = 6$.

Seega Mati sünniaastaks sobib 2016.

Lahendus 2.

Sünniaasta ja sünniaasta numbrite summa on 2025 ja see on neljakohaline, siis sünniaasta numbrite summa suurim võimalik väärtus on $1 + 3 \cdot 9 = 28$, mis tähendab, et Mati sünniaasta vähim võimalik väärtus on $2025 - 28 = 1997$.

Vaatame aastaarvu 1997. Sel juhul oleks Mati saanud summa $1997 + 1 + 9 + 9 + 7 = 2023$.

Kui sünniaasta oleks 1998, siis summa oleks 2 võrra suurem kui aastaarvu 1997 korral. Seega 1998 sobib Mati sünniaastaks.

Aastaarvu 1999 korral oleks summa 2027.

Aastaarvu 2000 korral saaks vaadeldavaks summaks 2002. Aastaarvude 2001 kuni 2009 korral oleks summad vastavalt 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014, 2016, 2018 ja 2020.

Aastaarvu 2010 korral oleks summa 2013. Aastaarvude 2011 kuni 2019 korral oleks summad vastavalt

2015, 2017, 2019, 2021, 2023, 2025, 2027, 2029 ja 2031.

Näeme, et ka aastaarv 2016 sobib Mati sünniaastaks.

Hindamine:

Näidatud, et sünniaasta esimeseks numbriks saab olla 1 või 2: 1p

Käsitletud varianti, kus sünniaasta esimene number on 1: 3p

Käsitletud varianti, kus sünniaasta esimene number on 2: 3p

7p

Märkus: Antud vastuseks vaid kaks sobivat aastaarvu: 2p

Antud vastuseks vaid üks sobiv aastaarv: 1p

5. Vastus: Linnuliikide vähim võimalik arv on 1013.

Lahendus:

Et linnuliikide arv oleks võimalikult väike, peaks samast liigist linde olema võimalikult palju. Samast liigist ei saa olla kolme ega enamat lindu, sest kui linnud a , b ja c oleks samast liigist ja istuks sellises järjestus, siis a ja b vahel istuks paarisarv (x) linde ning ka b ja c vahel istuks paarisarv (y) linde, siis lindude a ja c vahel istuks paaritu arv ($x + 1 + y$) linde. Seega ülimalt saab samast liigist olla kaks lindu.

Et $2025 : 2 = 1012$ jääk 1, siis vähim võimalik linnuliikide arv oli 1013.

Näiteks istuks samast liigist linnud kõrvuti ja rea ühes otsas veel üks üksik lind.

Hindamine:

Tähelepanek, et samast liigist linde peaks olema võimalikult palju: 1p

Näidatud, et samast liigist ei saa olla rohkem kui kaks lindu: 3p

Leitud vähim võimalik linnuliikide arv 1013: 2p

Näidatud, et linde 1013 liigist saab tingimustele vastavalt traadil istuda: 1p

7p

Märkus: Antud vaid õige vastus: 2p