

LAHENDUSED 12.KLASS

1. Vastus:1) 13 võimalust; 2) 11.

Lahendus:

Olgu esimeseks liidetavaks arv $x+1$ ja viimaseks $x+n$, siis järjestikuste liidetavate arv on n .

Aritmeetilise jada summa valemit kasutades saame võrrandi

$$\frac{x+1+x+n}{2} \cdot n = 2025$$

$$(2x+1+n) \cdot n = 4050.$$

Viimases võrrandis on mõlemad tegurid naturaalarvud. Naturaalarvu 4050 saab algteguriteks lahutamisel esitada kujul $4050 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$, ning tegur n on arvu 4050 jagaja, seejuures suurem kui 2.

Kuna $n < n+1+2x$, võime tegurile n anda ka ligikaudse ülemise hinnangu, milleks võib olla näiteks $\sqrt{4050} = \sqrt{2 \cdot 3^4 \cdot 5^2} = 9 \cdot 5\sqrt{2} = 45\sqrt{2} < 45 \cdot 1,5 = 67,5$. Sellised jagajad on: 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 25, 27, 30, 45, 50, 54, rohkem neid ei ole.

Kui $n = 54$, mis on suurim võimalik liidetavate arv, siis $2x+1+54 = 4050:54$, millest $x = 10$. Seega esimeseks liidetavaks on arv 11. Lihtsa arvutuse teel on võimalik kontrollida, et alates arvust 11 on 54 järjestikuse naturaalarvu summa 2025.

Hindamine:

- | | |
|--|----------|
| 1) Vajalike muutujate valik ja võrrandi koostamine (aritmeetilise jada summa valemi kasutamine d=1 korral) | 1p |
| Võrrandi viimine kujule, kus kahe naturaalarvu korrutis on 4050 | 1p |
| Arvu 4050 algteguriteks lahutamine | 1p |
| Sobivate jagajate leidmine
(kui ei ole leitud kõiki, kuid rohkem kui pooled jagajad, siis 1p) | 2p |
| 2) esimese liidetava leidmine kõige pikemas esituses
(Kui kõige pikema esituse tuvastamisel on tehtud viga, st ei ole 54 liidetavat, siis 0p) | 2p
7p |

2. Vastus: 6 km/h

Lahendus:

Tähistame jalakäija kiiruse v (km/h) ning teepikkuse, mille jalakäija läbis samal ajal, kui jalgrattur sõitis x (km).

Alates hetkest, mil jalgrattur hakkas liikuma, on nende liikumisele kuluv aeg võrdne. Jalakäija läbis x km kiirusega v km/h ja jalgrattur läbis $6+x$ km kiirusega $v+9$ km/h.

Seega $\frac{x}{v} = \frac{6+x}{v+9}$, millest $x = \frac{2v}{3}$.

Kuna tagasitulek oli kiirusega 4 km/h, on jalakäija kogu liikumiseks kuluv aeg

$$T(v) = \frac{6}{v} + \frac{x}{v} + \frac{6+x}{4} = \frac{6}{v} + \frac{2}{3} + \frac{18+2v}{12} = \frac{v^2+13v+36}{6v}.$$

Leiame funktsiooni $T(v)$ miinimumkoha.

$$T'(v) = \frac{(2v+13) \cdot 6v - 6 \cdot (v^2+13v+36)}{36v^2} = \frac{v^2-36}{6v^2}.$$

Ekstreemumkohad on $v_1 = -6$ ja $v_2 = 6$.

Veendume, et $v = 6$ on funktsiooni $T(v)$ miinimumkoht.

$$T''(v) = \frac{12}{v^3} \quad \text{ja} \quad T''(6) = \frac{12}{6^3} > 0$$

Hindamine:

Jalakäija kulutatud aja avaldamine ühe muutuja funktsioonina 3p

(kahe muutuja funktsioonina avaldatud aeg 2p)

Tuletise leidmine 2p

Miinimumkoha leidmine ja miinimumkoha kontroll 2p

7p

3. Vastus: (0;0) ja (4;-4) ehk sirged $y = 0$ ja sirge $y = 4x - 4$

Lahendus:

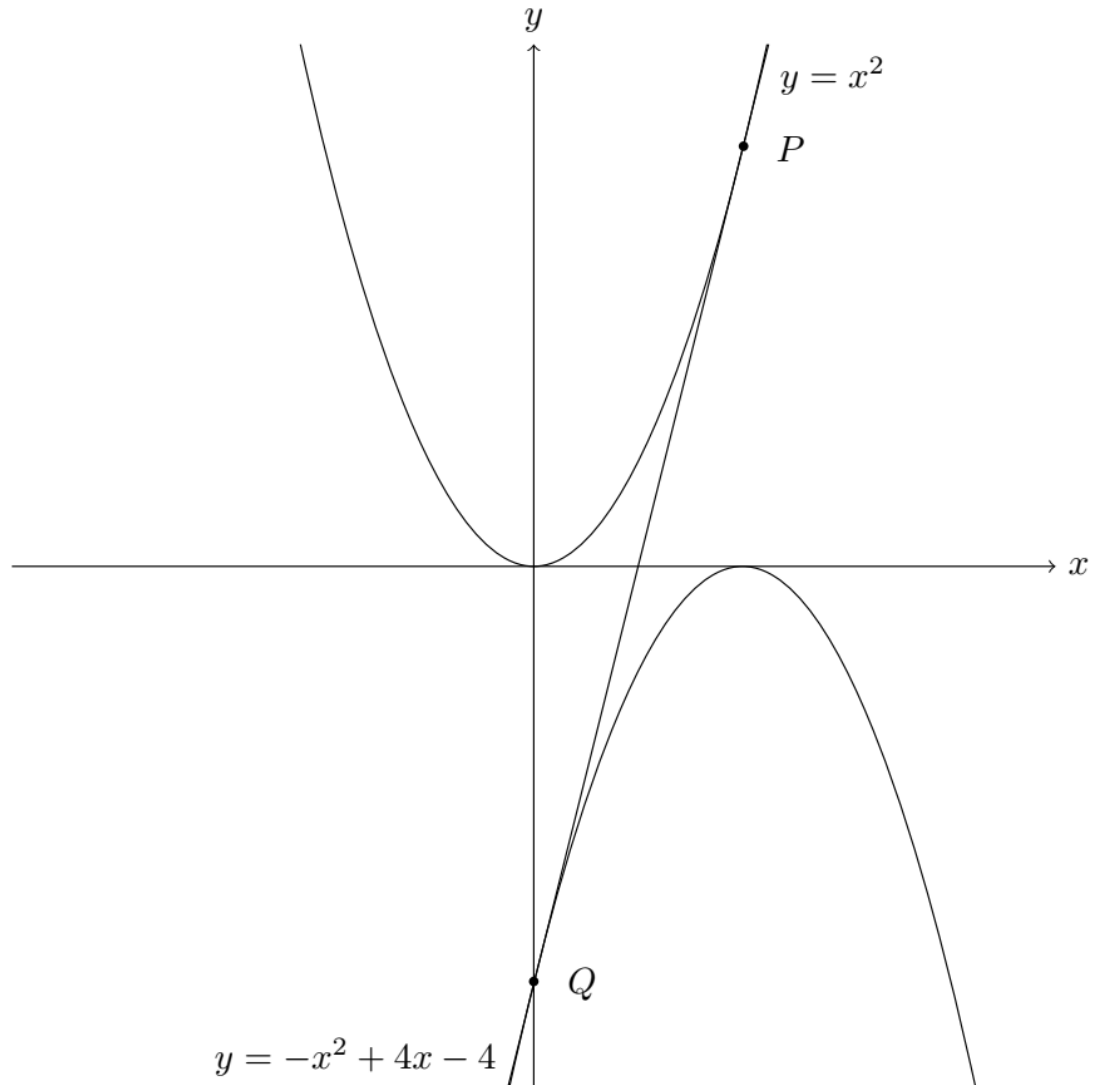
Lahendus 1. Puutumise korral on sirgel $y = kx + b$ ja paraboolil $y = x^2$ ainult 1 ühine punkt, st ruutvõrrandil $x^2 = kx + b$ ehk võrrandil $x^2 - kx - b = 0$ on ainult 1 lahend. Seega peab lahendivalemis diskriminant $D_1 = k^2 + 4b = 0$, millest järeldub, et $k^2 = -4b$. Et sama sirge $y = kx + b$ on puutujaks ka paraboolile $y = -x^2 + 4x - 4$, peab ruutvõrrandil $-x^2 + 4x - 4 = kx + b$ ehk võrrandil $x^2 + (k - 4)x + b + 4 = 0$ olema ainult 1 lahend. Seega peab lahendivalemis diskriminant $D_2 = k^2 - 8k - 4b = 0$. Et tegu on ühe ja sama puutujaga, saame teha asenduse $k^2 = -4b$ ja saame ruutvõrrandi $k^2 - 8k + k^2 = 0$ ehk võrrandi $k^2 - 4k = 0$, mille lahenditeks on $k_1 = 0$ ja $k_2 = 4$. Seega $b_1 = 0$ ja $b_2 = -4$. Järelikult antud paraboolide kahe ühise puutuja korral kas $k_1 = b_1 = 0$ või $k_2 = -b_2 = 4$.

Lahendus 2. Kui sirge $y = kx + b$ puutub parabooli $y = x^2$ punktis P , mille abstsiss on s , siis $P(s; s^2)$ ja $s^2 = ks + b$. Esitame teise funktsiooni avaldise kujul $y = -x^2 + 4x - 4 = -(x - 2)^2$. Kui selle funktsiooni ja sirge $y = kx + b$ puutepunkti Q abstsiss on t , siis $Q(t; -(t - 2)^2)$ ja $-(t - 2)^2 = kt + b$. Avaldame puutuja tõusu k funktsioonide tuletiste kaudu $k = 2s = -2t + 4$, millest saame, et $t = 2 - s$ ja puutepunkti Q saame määrata ka kujul $Q(2 - s; -s^2)$. Seega on sirge PQ tõus $k = \frac{s^2 - (-s^2)}{s - (2 - s)} = \frac{2s^2}{2s - 2}$.

. Et eespool on saadud võrdus $k = 2s$, siis saame võrrandi $\frac{2s^2}{2s - 2} = 2s$, mis teiseneb ruutvõrrandiks $s^2 - 2s = 0$ lahenditega $s_1 = 0$ ja $s_2 = 2$. Seega on olemas kaks ühist puutujat. Üks neist on määratud puutepunktidega $P_1(0;0)$ ja $Q_1(2;0)$, mis asuvad x -teljel, ja selle puutuja võrrand on $y = 0$. Selle korral $k = b = 0$. Teine puutuja on määratud punktidega $P_2(2;4)$ ja $Q_2(0;-4)$. Selle tõus $k_2 = 2s_2 = 4$ ja algordinaat $b_2 = -4 - 4 \cdot 0 = -4$. Teise puutuja võrrand on seega $y = 4x - 4$.

Lahendus 3. Et antud paraboolide haripunktid asuvad vastavalt punktides $H_1(0;0)$ ja $H_2(2;0)$, siis x -telg puutub mõlemat neist paraboolidest (vt joonist) ja sirge võrrandiga $y = 0$ on üheks otsitavaks puutujaks, mille korral $k = b = 0$. Kuna $y = -x^2 + 4x - 4 = -(x - 2)^2$, siis selle graafikuks oleva parabooli saame funktsiooni $y = x^2$ graafikuks oleva parabooli peegeldamisel x -teljest ja seejärel nihutamisel 2 ühiku võrra mööda x -telge paremale. Skitseerides küllalt täpselt graafikud, võime joonise põhjal oletada, et ühisel puutujal asuvad punktid $P_2(2;4)$ ja $Q_2(0;-4)$. Sirge PQ võrrandist $y = 4x - 4$ saame, et teine otsitav paar on oletatavasti $k = -b = 4$. Tuleb

kontrollida, kas leitud sirgel $y = 4x - 4$ on kummagi parabooliga tõepoolest ainult 1 ühine punkt. Kuna kummalgi võrrandil $x^2 = 4x - 4$ ja $-(x - 2)^2 = 4x - 4$ on ainult 1 lahend, kinnitab see oletust, et saadud sirge $y = 4x - 4$ on ühiseks puutujaks. Senisest lahenduskäigust aga ei selgu, kas ühiseid puutujaid on rohkem kui 2. Vastuse sellele leiame näiteks Lahendusest 1.



Hindamine:

Kuna erinevaid lahendusi on mitmeid, võiks lähtuda üldisest skeemist.

Näidatud, et ühiseks puutujaks on sirge $y = 0$ 2 p

Näidatud, et ühiseks puutujaks on sirge $y = 4x - 4$ 3 p

Lahenduskäigust selgub, et rohkem puutujaid ei ole 2 p

7p

4. **Vastus:** $x = \pi \pm 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lahendus:

Teeme asenduse $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ja lihtsustame võrrandi vasaku poole

$$(4 - \sin^2 x) \cdot \cos x + 3\sin^2 x + 4 = (3 + \cos^2 x) \cdot \cos x + 3(1 - \cos^2 x) + 4 =$$
$$= \cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x + 7.$$

Esitades arvu 7 kujul $7+1-1$, saame vahe kuubi valemi põhjal võrrandi vasaku poole kujul $(\cos x - 1)^3 + 8$. Seega tuleb lahendada võrrand $(\cos x - 1)^3 = -8$ ehk võrrand $\cos x - 1 = -2$, millest saame, et $\cos x = -1$ ja $x = \pi \pm 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Hindamine:

Tehtud sobiv asendus ja lihtsustatud	2 p
Kasutatud vahe kuubi valemit	2 p
Saadud põhivõrrand	1 p
Leitud üldlahend	<u>2</u> p
	7p

5. Vastus: Suurem $3\frac{1}{8}\%$ võrra.

Lahendus:

Olgu R esialgse koonuse põhja raadius ja H selle koonuse kõrgus ning samad suurused eraldatud koonusel vastavalt r ja h . Koonuste ruumalad on siis $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ ja $V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ning silindri ruumala $V_s = \pi r^2 h$. Paneme tähele, et $V_s = 3V_k$, mis tähendab, et väikese koonuse asendamisel silindriga suureneb esialgse keha ruumala kahe väikese koonuse ruumala võrra. Et kahe koonuse telglõiked on sarnased kolmnurgad ja $h : H = 1 : 4$, siis ka $r : R = 1 : 4$, st $H = 4h$ ja $R = 4r$. Seega, esialgse koonuse ruumala on $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi (4r)^2 \cdot 4h = \left(\frac{1}{3}\right)\pi r^2 h \cdot 64 = 64 \cdot V_k$. Kuna see ruumala suurenes $2V_k$ võrra, siis see suurenemine moodustas $\frac{2}{64} \cdot 100\% = 3\frac{1}{8}\%$ (ehk 3,125 %) esialgse koonuse ruumalast.

Hindamine:

Kasutades koonuste telglõigete sarnasust, saadud seos

koonuse põhjade raadiuste jaoks 2 p

Avaldatud vajalike kehade ruumalad samade parameetrite kaudu 2 p

Leitud ruumala suurenemine protsentides 3 p

7p