

LAHENDUSED 11.KLASS

1. Vastus: $-\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{4}$.

Lahendus:

Teisendame avaldist

$$\begin{aligned}\sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \\&= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \\&= \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = \\&= \sin^2 x (1 - \cos^2 x) - \sin^2 x \cos^2 x + (1 - \sin^2 x) \cos^2 x = \\&= \sin^2 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.\end{aligned}$$

Seega

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 2a \sin x \cos x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x + a \sin 2x.$$

Teeme asenduse $m = \sin 2x$, millega esialgne võrratus saab kuju $1 - \frac{3}{4}m^2 + am \geq 0$, ehk $3m^2 - 4am - 4 \leq 0$, kusjuures peab kehtima ka $-1 \leq m \leq 1$.

Ruutfunktsioon $y = 3m^2 - 4am - 4$ muutuja m suhtes peab omandama mittepositiivseid väärtusi kogu lõigul $m \in [-1; 1]$. Graafikuks on üles avanev parabool, seega peab võrratus $3m^2 - 4am - 4 \leq 0$ kehtima $m = -1$ ja $m = 1$ korral.

Siit saame: $3 \cdot (-1)^2 - 4a \cdot (-1) - 4 \leq 0 \Rightarrow a \leq \frac{1}{4}$ ja $3 \cdot 1^2 - 4a \cdot 1 - 4 \leq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{1}{4}$.

Hindamine:

$\sin^6 x + \cos^6 x$ teisendamine	3p
Ruutvõrratuse koostamine $\sin 2x$ suhtes	1p
Parameetri a väärtuste leidmiseks vajalike tingimuste kirjeldamine	2p
Parameetri a väärtuste leidmine	1p
	7p

2. Vastus: Ainuke sobiv arv on 198.

Lahendus:

Otsitav arv N on kolmekohaline, sest ainult kolmest erinevast numbrist saab moodustada täpselt 6 erinevat kahekohalist arvu. Olgu $N = \overline{abc}$. Siis koostatud kuue kahekohalise arvu summa on

$$\overline{ab} + \overline{ba} + \overline{ac} + \overline{ca} + \overline{bc} + \overline{cb} = 10a + b + 10b + a + 10a + c + 10c + a + 10b + c + 10c + b = 22(a + b + c).$$

Saame võrrandi $22(a + b + c) = 2(100a + 10b + c)$, mille lihtsustamisel saame võrrandi $10c + b = 89a$. Et võrrandi vasakul poolel on kahekohaline arv, mis ei ole suurem kui 99, järeldub siit, et ainuke võimalus numbrite valikuks on $a = 1$, $b = 9$ ja $c = 8$. Seega ainuke tingimustega sobiv arv on $N = 198$.

Hindamine:

Järeldus, et arv N on kolmekohaline naturaalarv	1 p
Kuue kahekohalise arvu summa avaldise leidmine	2 p
Võrrandi koostamine arvu N numbrite määramiseks	2 p
Lahendi 198 leidmine ja põhjendus, et see on ainuke	<u>2 p</u>
	7p

3. Vastus: : 3, $3\sqrt{3}$ ja 6 pikkusühikut

Lahendus:

Olgu kolmnurga nurkade suurused α, β ja γ ning nende vastaskülgede pikkused vastavalt a, b ja c . Kui $\alpha : \beta = 1 : 2$, siis $\beta = 2\alpha$ ja α on kindlasti teravnurk.

Kui $a : b = 1 : \sqrt{3}$, siis $b = a \cdot \sqrt{3}$. Kasutades siinuslausest saadud võrdusi, saame, et

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{\sin 2\alpha} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}. \text{ Seega kehtib võrdus } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha},$$

millest järeldub, et $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $\alpha = 30^\circ$ ning $\beta = 2\alpha = 60^\circ$.

Et $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$, on tegu täisnurkse kolmnurgaga, mille pindala saame arvutada valemiga $S = 0,5 \cdot a \cdot b = 0,5 \cdot a \cdot a \cdot \sqrt{3} = 0,5 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$. Seega $4,5 \cdot \sqrt{3} = 0,5 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$, millest saame, et $a^2 = 9$ ja $a = 3$ ning $b = a \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3}$. Et $a : c = \sin 30^\circ$, siis $c = 2a = 2 \cdot 3 = 6$.

Hindamine:

Võetud kasutusele sobivad tähistused ja leitud kahe nurga ja nende vastaskülgede vahelised seosed	2 p
Siinuslause (või mõne muu seose) abil jõutud põhivõrrandini	2 p
Leitud kolmnurga nurgad	1 p
Pindala abil leitud kolmnurga küljed	<u>2 p</u>
	7p

4. Vastus: 21 eurot

Lahendus:

Kui küünlapaki hind oli k eurot ja 25 senti, siis küünlajala hind oli $3k$ eurot ja 75 senti. Seega kogu kauba eest tuli tasuda $k + 3k$ eurot ja $25 + 75$ senti, mis andsid kokku ühe euro. Järelikult oli kauba kogumaksumus täiseurodes ja seejuures kahekohaline arv kujul $4k + 1$, mille numbrite summa oli 11. Kuna ostusumma ei ületanud 50 eurot, siis tulevad kõne alla kahekohalised arvu 29, 38 ja 47. Neist arvudest on kujul $4k + 1$ esitatav vaid arv $29 = 4 \cdot 7 + 1$.

Seega tagastati Oskarile $50 - 29 = 21$ eurot.

Hindamine:

Jõutud järelduseni, et ostusumma ei sisalda sente ja on kahekohaline arv	2 p
Leitud 50-st väiksemad kahekohalised arvud, mille numbrite summa on 11	2 p
Leitud neist ainus, mis on esitatav kujul $4k + 1$	2 p
Leitud tagastatud summa	<u>1 p</u>
	7p

5. Vastus: 1 tund

Lahendus:

Esiteks, kuna vennad sõidavad ühesuguse kiirusega ja kõnnivad jalgsi ühesuguse kiirusega ning jõuavad kohale samal ajal, on selge, et jalgratas tuleb jätta täpselt poolele teele.

Olgu kiirus jalgrattal sõites V_R (km/h) ja jalgsi kõndides V_K (km/h). Kuna ühe kilomeetri läbimiseks jalgrattal kulub 12 minutit vähem aega, saame $\frac{1}{V_K} - \frac{1}{V_R} = \frac{1}{5}$.

Esilagu planeeritud aeg sõbra juurde jõudmiseks oleks olnud $\frac{10}{V_K}$ tundi.

Kombineeritud liikumisviisi puhul kulub aega $\frac{5}{V_K} + \frac{5}{V_R}$ tundi,

ajavõit seega $\frac{10}{V_K} - \left(\frac{5}{V_K} + \frac{5}{V_R}\right) = \frac{5}{V_K} - \frac{5}{V_R}$ tundi.

$$\frac{5}{V_K} - \frac{5}{V_R} = 5 \cdot \left(\frac{1}{V_K} - \frac{1}{V_R}\right) = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1 \text{ (tund)}.$$

Hindamine:

Arusaamine, et jalgratas tuleb jätta poolele teele	1p
Jalgsi liikumise ja jalgrattaga liikumise aegade erinevust väljendav võrrand	2p
Esialgse planeeritud aja ja kombineeritud liikumisviisil kuluva aja erinevuse väljendamine	2p
Aegade erinevuse leidmine	2p
	7p